بررسی تحلیلی تأثیر لغزش برمقاومت مرزی جریان حول نانو ذره کروی در اعداد رینولدز پایین *

محمدرضا میگون پوری(۱) غلامعلی عاطفی(۲) حمید نیازمند(۳)

چکیده در این مقاله حل معادله‌ی دیفرانسیلی اوسین و معادله‌ی پیوستگی برای جریان یک سیال لزج حول یک نانو ذره کروی ساکن به کمک روابط لمب برای مؤلفه‌های سرعت و فشار صورت می‌گیرد. تنش برشی بر روی سطح متناسب با سرعت لغزش فرض می شود. لغزش، تأثیر عمده ای روی پروفیل‌های سرعت شعاعی و محیطی می گذارد؛ بدین صورت که در یک عدد رینولدز معین با افزایش لغزش احتمال جدایش جریان و ایجاد نقطه عطف روی پروفیل‌های سرعت کم می‌شود. اثر لغزش بر مقاومت کل در اعداد رینولدز پایین‌تر کمتر است. با افزایش لغزش روی سطح، ضریب پسای ناشی از تنش برشی کاهش یافته و ضریب پسای ناشی از تنش نرمال زیاد می‌شود؛ به طوری‌که در شرایط لغزش کامل، ضریب پسای تنش برشی به صفر نزدیک می‌شود و ضریب پسای ناشی از تنش نرمال به حداکثر خود می‌رسد. این امر، مبین عدم برابری جریان حول کره در حالت لغزش کامل و جریان پتانسیل حول کره است.

واژه‌های کلیدی عددتروستل، اوسین، لغزش، نانو ذره کروی.

Analytical Investigation of Slip Effects on Boundary Drag in Flow Around of a Nano Spherical Particle at Low Reynolds Numbers

G.H. Atefi M.R. Meigounpoory H. Niazmand

Abstract *In this paper, Oseen differential equation and continuity equations are solved for viscous flow around a stationary sphere using Lamb relations for velocity and pressure components. It is assumed that the tangential stress is proportional to the slip velocity on the surface. Slip considerably affects the tangential and radial velocity profiles such that increasing slip at a given Reynolds number delays flow separation and inflect point creation in velocity profiles. Slip effects on total drag coefficient at lower Reynolds number are relatively limited. Increasing slip on the surface decreases the shear drag coefficient, while the radial drag coefficient increases. At full-slip conditions, shear drag coefficient is basically zero and radial drag coefficient reaches its maximum value. Therefore, it is concluded that flow around the spherical nano particle at full-slip condition is not equal to potential flow around the spherical particle.*

Key Words Oseen, Spherical Nano Particle, Slip, Trostel number.

* نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۸۵/۳/۷ و نسخه‌ی نهایی آن در تاریخ ۸۸/۷/۷ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) نویسنده مسؤول : فارغ التحصیل دوره‌ی دکتری، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم وصنعت ایران

(۲) دانشیار، دانشگاه علم وصنعت ایران، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

(۳) دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

مقدمه

جریان حول یک ذره‌ی کروی را می‌توان به عنوان حالت ساده تری از خانواده جریان حول اجسام غوطه ور مورد بررسی قرار داد. تحلیل جریان حول کره به عنوان یک مسأله‌ی کاربردی در موارد صنعتی، مانند حرکت ذرات معلق در هوا، قطره‌ی سوخت در محفظه‌ی احتراق، جریآن‌های دو فاز در علوم مهندسی مکانیک، صنایع غذایی و شیمیایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشاهدات آزمایشگاهی، نشانگر حرکت ذرات کروی در امتداد جریان است که از آن جمله می‌توان به حرکت قطرات سوخت در محفظه‌های احتراق و حرکت حباب‌های تولید شده در میدان جریان اشاره نمود. در صنایع ورزشی نیز تحلیل جریان، حول کره مانند توپ گلف و تنیس و آگاهی از مشخصات دقیق سینماتیک و دینامیک آن برای طراحی بهینه مفید خواهد بود.

مسأله‌ی شرط مرزی در شاره‌ها یکی از مباحث بنیادین در ابتدای شروع دینامیک شاره‌ها بوده است. اصولاً سه نظریه‌ی ذیل در مورد شرط مرزی در حرکت شاره‌ها از دیر باز مطرح بوده است. اولین ایده این بود که شاره به سطح می‌چسبد و سرعت به طور پیوسته از مرز رشد می‌کند که این فرضیه عدم لغزش نام گرفت. در نظریه‌ی دوم قشری با ضخامت محدود از خود سیال روی دیواره می‌ماند و بقیه، سیال روی این قشر سر می‌خورد. ضخامت این لایه، تابع انحنای این دیواره و نوع سیال است. در نظریه‌ی سوم، شاره روی سطح جسم جامد سر می‌خورد و در این حالت، سرعت سیال روی سطح با تنش برشی متناسب است.

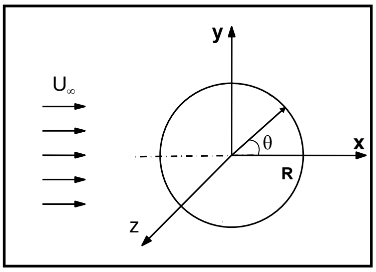
از اواخر قرن گذشته به طورعمومی این نظریه مطرح است که سرعت جریان سیال روی جداره صلب (به جز گازهای رقیق) صفر است و بسیاری از آزمایشات نیز تأیید کننده‌ی این نظریه می‌باشند، ولی در سال‌های اخیر، آزمایش‌های صورت گرفته و تحقیقات انجام شده در حالات خاصی لغزش روی سطح نیز مشاهده شده که سؤالات زیادی را در مورد صحت شرط مرزی عدم لغزش مطرح نموده است. درسال ۱۹٦۵ گلدشتین[1] پدیده‌ی لغزش سیال را در سطح تماس سیال و جامد مورد بررسی و مطالعه قرار داد. وی بیان کرد اطلاعات پایه‌ای در مورد وضعیت سیال برروی سطوح مرزی سطح جامد، ناقص بوده و به طور مؤثر در مطالعات آزمایشگاهی درک نشده و مورد فهم عمیق قرار نگرفته است و باید کارهای آزمایشی وتئوری در این زمینه ادامه یابد. در سال۲۰۰۱ تیرل و اتارد [2] جریان استوکس را در بین دو صفحه‌ی موازی نامحدود که در آنها حباب‌ها بر روی سطح مدل شده بودند، مورد بررسی قرار دادند و نتیجه گرفتند که مدل کردن شرط مرزی جریان سیال در مقیاس‌های بسیار کوچک به تعامل میان سیال و خواص سطح بستگی دارد و بنابر این، مدل نمودن شرط مرزی لغزش یا عدم لغزش باید بر اساس خواص سطح و تعامل سیال و سطح جامد(fluid-surface interaction) انجام گیرد. در سال‌های اخیر، محققان بیان نموده‌اند که شرایط مرزی درمقیاس‌های طولی کوچک، اهمیت زیادی دارد وشرط مرزی عدم لغزش برای جریآن‌های میکروکانال و در مقیاس‌های نانو، مناسب نیست. در سال ۲۰۰۲ ترسوی و همکاران [3] در دانشگاه کالیفرنیا تحقیقاتی پیرامون جریان در میکروکانال‌ها انجام دادند. مطابق مطالعات ایشان، مدل لغزش در محاسبات جریان سیال میکروکانال‌ها معتبر است. آزمایشات و تحقیقات جدید، وجود لغزش را در جریان سیال بر روی برخی از سطوح در ابعاد بزرگ تأیید کرده است. واتانابه و همکاران [4,5] در سال ۱۹۹۸ و۱۹۹۹ لغزش سیالات نیوتنی را در مرزهای لغزشی جسم مورد مطالعه‌ی آزمایشگاهی قرار دادند. هدف از این بررسی، مطالعه آزمایشگاهی برای تعیین سرعت لغزش یک سیال نیوتنی برروی دیواره است. در این بررسی با محاسبه‌ی پروفیل سرعت، نشان داده شد که صحت فرضیات ناویر مورد تأیید است و تنش برشی با سرعت لغزش متناسب است. واتانابه با آزمایشی که در جریان با عدد رینولدز ۱۰۰۰ – ۱۹۸۰ انجام شد، معین کرد که در جریان سیال نیوتنی بر روی

یک سطح، تنش برشی متناسب با سرعت لغزش u_s است و با افزایش لزجت و عدد رینولدز، سرعت لغزش نیز افزایش می‌یابد. واتانابه و اگاتا [6] در سال ۱۹۹۸ خصوصیات جریان را پیرامون یک دیسک درحال دوران با دیواره‌های پوشیده شده با ماده‌ی ضد آب و با استفاده از تئوری لغزش به صورت تحلیلی و آزمایشگاهی (تجربی) مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نتیجه گرفتند که سرعت مماسی در نزدیکی دیواره‌ی پوشیده از ماده‌ی ضد آب در مقایسه با دیواره‌ی صاف، کاهش می‌یابد و به تبع آن پدیده‌ی کاهش نیروی پسای دیسک در حال دوران که مربوط به کاهش مؤلفه‌های مماسی سرعت در نزدیکی دیواره است، ایجاد می‌شود. واتانابه و آکینو [7] در سال ۱۹۹۹ به بررسی جریان کوئت در بین دو استوانه‌ی هم مرکز پرداختند. در این مقاله، جریان یک سیال غیر نیوتنی در حالت دائمی و آرام با استفاده از شرط مرزی لغزش، مورد مطالعه قرار گرفته است. با انجام آزمایش، ثابت شد که سرعت لغزش سیال نیوتنی بر روی دیواره، متناسب با تنش برشی جداره و منطبق بر فرضیه‌ی ناویر است. هم‌چنین در یک سیال غیر نیوتنی مثل محلول پلیمری، تنش برشی دیواره با سرعت لغزش، متناسب نیست و به‌صورت $\tau_{r\theta}|_{r=R_1}=\alpha u_s^n$ ذیل ارائه می‌شود، α, n مقادیر ثابت فیزیکی هستند. تروستل [8] نشان داد که هر جریان بر روی مرز لغزش دارد و بررسی جریان‌هایی که تا کنون صورت گرفته است به صورت یک حالت مرزی قابل بیان است. بنابراین با بررسی جریان‌ها با استفاده از شرط مرزی لغزش، اطلاعات جدیدی درمورد اثرات متقابل سیال- جداره قابل انتظار است. در این زمینه، آزمایشی نیز در انستیتوی مکانیک [9] برای جریان آب در یک کانال مستطیلی انجام گرفت که سطوح دیواره‌های آن با زبری یکنواخت از جنس پلکسی گلاس و سطوح زیرین که قابل تعویض بودند، از جنس‌های مختلف با زبری منصوب (مثلاً شیشه و شیشه ماسه اندود) انتخاب شدند. آزمایش در یک کانال، تحت یک جریان آرام با عدد رینولدز کم و بین دو صفحه‌ی هم‌جنس (مثلاً شیشه) با کیفیت سطحی یکسان انجام گرفت و ملاحظه شد که پروفیل سرعت، کاملاً متقارن و ماکزیمم سرعت، منطبق بر محور مرکزی جریان است. در مرحله‌ی بعد یکی از دو صفحه، مثلاً صفحه‌ی زیرین، ماسه اندود شده و آزمایش تکرار شد. این بار آزمایش نشان داد که ماکزیمم سرعت از موقعیت قبلی جابه‌جا شده و به صفحه شیشه ای صاف نزدیک تر گردیده است که این پدیده می‌تواند دلیلی بر حضور لغزش روی جداره باشد. عاطفی [9,10] جریان سیال حول یک استوانه ساکن و در حال دوران را به‌صورت تحلیلی و با تقریب اوسین [11] با اعمال شرط مرزی لغزش مورد مطالعه قرار داد. وی به صورت پارامتری اثرات تغییر عدد لغزش را بر روی مشخصات سینماتیک جریان، مورد ارزیابی قرار داد و مشخص نمود که با تغییر عدد تروستل تغییرات زیادی روی پروفیل‌های سرعت و میدان فشار جریان در محدوده‌ی اعداد رینولدز پایین ایجاد می‌شود. راه حل‌های متعددی برای جریان سیال حول کره باشرایط مرزی مختلف و شیوه‌های حل متفاوت، ارائه شده است. حل استوکس [12] از روش‌های تحلیلی ساده در حوزه‌ی اعداد رینولدز پایین است. حل تحلیلی جریان حول کره با تقریب اوسین نیز با استفاده از شرط مرزی عدم لغزش به روشهای مختلف توسط توموتیکا و همکارش [13] و نیز توسط گلدشتاین [14] حل شده است. ناصری [15] معادله‌ی اوسین حول کره را با شرط مرزی لغزش حل نمود. مجموعه‌ی کاملی از حل‌های صورت گرفته در ارتباط با ذرات کروی مانند قطره‌ی کروی و حباب‌ها توسط کلیفت و همکارانش [16] و مگناودت و همکارانش [17] ارائه شده است. نتایج به‌دست آمده در این تحقیقات، برای جریان سیال حول ذرات کروی، حباب قطره و با استفاده از برابری مرزی تنش بین جریان سیال و جسم کروی بوده و از شرط مرزی لغزش استفاده نشده است. عاطفی و همکاران [18] جریان سیال حول یک نانو ذره‌ی کروی را با استفاده از شبیه سازی عددی سه بعدی و اعمال شرط مرزی لغزش، مورد مطالعه قرار دادند. در این مقاله، جریان سیال

نیوتنی غیر قابل تراکم حول یک ذره کروی ساکن در اعداد رینولدز پایین با استفاده از تقریب اوسین و در نظر گرفتن شرط مرزی لغزش با استفاده از روش لمب، حل می‌گردد و اثرات عدد تروستل بر مشخصات میدان جریان به‌صورت پارامتری مطالعه می‌شود. نتایج به‌دست آمده نیز با نتایج عددی معادله‌ی ناویر استوکس و آزمایش مقایسه می‌گردد، که نتایج در این تحلیل به حل عددی نزدیکتر است که خود، مبین ناقص بودن حل [15] است.

صورت مساله

جریان سیال لزج آرامی رافرض می کنیم که در بی‌نهایت دارای سرعت V_∞ است و از مانع کروی به شعاع a عبورمی‌کند. برای تعیین میدان سرعت و خطوط جریان، باید مسأله‌ی مرزی حل شود که عبارت از معادله‌ی اوسین و پیوستگی می باشد. هدف از حل معادله‌ی حاکم بر میدان جریان، محاسبه‌ی مؤلفه‌های سرعت، فشار و خطوط جریان با در نظر گرفتن شرط مرزی لغزش می‌باشد. شکل (۱) محورهای مختصات مساله را نشان می‌دهد.



شکل ۱ نمایش مختصات مسأله

حل مسأله ومعادلات حاکم

معادله‌ی اصلی حاکم بر یک سیال نیوتنی، معادله‌ی ناویر استوکس است که به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$F+\nu\Delta V-\frac{1}{\rho}\nabla P=\frac{\partial V}{\partial t}+(V\cdot\nabla)V \quad (۱)$$

معادله‌ی پیوستگی که از قانون بقای جرم به‌دست می‌آید، عبارتست از:

$$\nabla . V=0 \quad (۲)$$

برای جریان‌های آرام در اعداد رینولدز پایین می‌توان از تقریب اوسین برای حل مشکل غیر خطی بودن معادله‌ی استفاده کرد. معادله اوسین بی بعد درحالت پایا عبارتست از:

$$\frac{2}{Re}\Delta V-\nabla P-\frac{\partial V}{\partial x}=0 \quad (۳)$$

برای حل مساله از روابط لمب(Lamb) [10] که به‌صورت ذیل می باشد، استفاده شده است:

$$P=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\nabla\Phi . e_x \quad (٤)$$

$$\mathbf{V}=\nabla\left(-\Phi+\frac{\chi}{2k}\right)-\chi e_x \quad (٥)$$

که در آن Φ و χ توابع اسکالر و Re و k از رابطه ذیل به‌دست می‌آید:

$$,\ Re=\frac{2V_\infty a}{\nu}\quad k=\frac{Re}{4} \quad (٦)$$

با قراردادن این روابط در معادله‌ی اوسین، دو معادله‌ی بهم وابسته ذیل، حاصل می شود:

$$\Delta\Phi=0 \quad (۷)$$

$$\Delta\chi-2k\frac{\partial\chi}{\partial x}=0 \quad (۸)$$

با حل روابط فوق و درنظر گرفتن توابع لژاندر P_nو بسل کروی J_n ، $\mu=Cos\theta$ ، مقادیر توابع $\Phi(r,\mu)$ و $\chi(r,\mu)$ از روابط ذیل به‌دست می‌آید:

$$\Phi(r,\mu)=V_\infty\sum_{n=0}^{\infty}C_n\frac{P_n(\mu)}{r^{n+1}} \quad (۹)$$

$$\chi(r,\mu)=V_\infty e^{kx}\sum_{m=0}^{\infty}D_m P_m(\mu)J_n(kr)= V_\infty e^{kx}\sum_{m=0}^{\infty}D_m P_m(\mu)(2m+1)\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \quad (۱۰)$$

با قرار دادن روابط فوق در معادلات (٤) و (٥) مؤلفه‌های سرعت عبارتند از:

$$V_r(r,\theta) = V_\infty \sum_{n=0}^{\infty} [C_n \frac{(n+1)}{r^{n+2}} + \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} D_m \Re_{m,n}(\eta)\right)] P_n(\mu) \quad (۱۱)$$

$$V_\theta(r,\theta) = V_\infty \mathrm{Sin}\theta \begin{Bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{P_n'(\mu)}{r^{n+2}} \\ -\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} D_m G_{m,n}(\eta)\right) \end{Bmatrix} P_n'(\mu) \quad (۱۲)$$

که در روابط فوق، مقادیر $\Re_{m,n}(\eta), G_{m,n}(\eta)$ به صورت ذیل به‌دست آمده‌اند:

$$G_{m,n}(\eta) = [\hbar_{m,n} P_n(\mu)(\frac{\mu}{\eta} + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{4}) + \wp_{m,n} P_n'(\mu)] J_n(kr) \quad (۱۳)$$

$$\Re_{m,n}(\eta) = \hbar_{m,n}(J_n(kr)\left(\frac{3\mu}{2} + \frac{n}{r}\frac{1}{2k}\right) - kJ_{n+1}(kr)) \quad (۱٤)$$

برای محاسبه‌ی $\hbar_{m,n}(\eta)$ با استفاده از بسط توابع لژاندر خواهیم داشت که:

$$P_m(\mu) e^{\eta\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar_{m,n}(\eta) P_n(\mu) \quad (۱۵)$$

اکنون با استفاده از قضیه‌ی تعامد توابع لژاندر و ضرب طرفین در تابع لژاندر $P_n(\mu)$ داریم:

$$\hbar_{m,n}(\eta) = \frac{\int_{-1}^{1} P_n(\mu) P_m(\mu) e^{\eta\mu} d\mu}{\int_{-1}^{1} P_n^{\,2}(\mu) d\mu} \quad (۱٦)$$

برای به‌دست آوردن تابع $\wp_{m,n}(\eta)$ با استفاده از روابط مربوط به بسط توابع لژاندر، به ترتیب ذیل عمل می‌کنیم:

$$P_m'(\mu) e^{\eta\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \wp_{m,n} P_n'(\mu) \quad (۱۷)$$

بنابراین با استفاده از استقراء ریاضی رابطه‌ی کلی برای محاسبه، ضریب $\wp_{m,n}(\eta)$ به‌صورت ذیل به‌دست می‌آید:

$$\wp_{m,n}(\eta) = -\frac{\int_{-1}^{1} e^{\mu\eta} m\left(\mu P_m(\mu) - P_{m-1}(\mu)\right) P_n(\mu) d\mu}{n \int_{-1}^{1} \left(\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu)\right) P_{n-1}(\mu) d\mu} \quad (۱۸)$$

مشتق توابع $\wp_{m,n}(\eta),\ \hbar_{m,n}(\eta)$ از روابط ذیل به‌دست می‌آید.

$$\wp_{m,n}'(\eta) = \mu \wp_{m,n}(\eta) \quad (۱۹)$$

$$\hbar_{m,n}'(\eta) = \mu \hbar_{m,n}(\eta) \quad (۲۰)$$

که در آن $\eta_0 = \mathrm{Re}/4$ و $\eta=kr$ می‌باشد. با استفاده از روابط مختصات کروی در راستای (r,θ) و به کارگیری تابع Φ از رابطه‌ی (۱۱) و قرار دادن آن در رابطه‌ی لمب (٦)، رابطه‌ی فشار جریان حول کره را به صورت ذیل محاسبه می‌کنیم.

$$P(r,\theta) = -\rho V^2_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{r^{n+1}}\left((n+1) P_{n+1}(\mu)\right) \quad (۲۱)$$

خطوط جریان با استفاده از رابطه‌ی ذیل از معادله‌ی سرعت شعاعی به‌دست می‌آید :

$$V_r = \frac{1}{r^2 \mathrm{Sin}\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad (۲۲)$$

با استفاده از تغییر متغیر $r^* = r/a, \psi^* = \psi/a^2 V_\infty$ تابع جریان را بی بعد می کنیم. بی بعد شده‌ی تابع جریان به صورت ذیل خواهد شد:

$$\psi^* = \frac{1}{3r^*}(P_2(\mu) - P_0(\mu)) - \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{D_m}{(2n+1)}\begin{pmatrix} \frac{1}{r^{*n}} \Re_{m,n}(\eta_0) \\ -r^{*2} \Re_{m,n}(\eta_0 r^*) \end{pmatrix}] \times \times\left(P_{n+1}(\mu) - P_{n-1}(\mu)\right) \quad (۲۳)$$

اکنون با استفاده از شرایط مرزی، ضرایب مجهول C_n, D_m محاسبه می‌شود.

اعمال شرط مرزی

شرط مرزی حاکم بر سطح کره صلب را به صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

۱- بردار نرمال سرعت بر روی سطح صفر است، یا در $Vr=0$, $r=a$ است.

اکنون به اعمال شرایط مرزی در مسأله می‌پردازیم. سرعت سیال روی کره را به این صورت، نمایش می‌دهیم:

$$V_{fluid} = V_\infty e_x + V \quad (۲٤)$$

بردار سرعت محیطی بر روی سطح کره را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$V_r(r,\theta)\big|_{r=a} = e_r\cdot(V_\infty e_x + V) = V_\infty \mathrm{Cos}\theta + V_r(a,\theta) \quad (25)$$

به علت صلب بودن جداره‌ی سطح کره، مؤلفه‌ی شعاعی سرعت، صفراست.

$$V_r(a,\theta) = -V_\infty \mathrm{Cos}\theta \quad (26)$$

با قرار دادن مؤلفه شعاعی سرعت در رابطه فوقریال خواهیم داشت:

$$V_r(a,\theta) = V_\infty \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{(n+1)}{a^{n+2}} + \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} D_m \Re_{m,n}(\eta_0)\right) P_n(\mu) = -V_\infty \mathrm{Cos}\theta = -V_\infty P_1(\mu) \quad (27)$$

که در آن:

$$\Re_{m,n}(\eta_0) = \hbar_{m,n}\left(J_n(\eta_0)\left(\frac{3\mu}{2}+\frac{n}{2\eta_0}\right) - kJ_{n+1}(\eta_0)\right) \quad (28)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲۷), رابطه‌ی نهایی برای محاسبه‌ی ضرایب C_n به شکل ذیل خواهد شد:

$$\begin{cases} C_n = -\dfrac{a^{n+2}}{2(n+1)}\left(\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} D_m \Re_{m,n}(\eta_0)\right) - \dfrac{a^{n+2}}{(n+1)}, & n=1 \\ C_n = -\dfrac{a^{n+2}}{2(n+1)}\left(\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} D_m \Re_{m,n}(\eta_0)\right), & n=2,3,4,.... \end{cases} \quad (29)$$

۲- تنش برشی برروی سطح، متناسب با سرعت سیال است $\tau = \lambda V_\theta$. که درآن τ، تنش برشی و $\lambda \succ 0$؛ ضریب لغزش است. این شرط مرزی دو حالت خاص عدم لغزش $\lambda \to \infty$و لغزش ایده آل $\lambda \to 0$ را که در آن $\tau = 0$ است، در برمی‌گیرد. شرط مرزی لغزش در مختصات کروی عبارتست از:

$$\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{a}\left(1+\frac{\lambda a}{\mu}\right)V_\theta\right) = -\left(1+\frac{\lambda a}{\mu}\right)\frac{V_\infty}{a}\mathrm{Sin}\theta\Bigg|_{r=a,\theta} \quad (30)$$

با بی‌بعد کردن معادلات شرط مرزی درمختصات کروی، رابطه ذیل، حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - (1+\mathrm{Tr})(V_\theta - \mathrm{Sin}\theta)\right)\Bigg|_{r=1} = 0 \quad (31)$$

که در آن، $\mathrm{Tr} = \lambda.a/\mu$ عدد تروستل نام دارد [10] و a شعاع کره و μ گرانروی سیال است. اکنون با به کاربردن رابطه‌ی (۱٤) در معادله‌ی شرط مرزی لغزش(۳۱)، رابطه‌ای برای محاسبه‌ی دومین مجهول D_m به‌دست می‌آید:

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m \Pi_{m,n}(\eta_0) = (Tr+2)\frac{2(n+1)}{n+3+Tr}, \quad n \neq 1$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m \Pi_{m,n}(\eta_0) = 0, \quad n = 1 \quad (32)$$

که درآن $\Pi_{m.n}(\eta_0)$ از رابطه‌ی ذیل به‌دست می‌آید:

$$\Pi_{m.n}(\eta_0) = \left(\Re_{m,n}(\eta_0) - \frac{2(n+1)}{n+3+Tr}\frac{ka}{2}G'_{m,n}(\eta_0) + \frac{2(n+1)}{n+3+Tr}\frac{(1+Tr)}{2}G_{m,n}(\eta_0)\right) \quad (33)$$

$G'_{m,n}(\eta)$ با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۱۵) به‌دست می‌آید.

محاسبه‌ی نیروی پسا

با استفاده از قانون ماده استوکس، تنش وارده از طرف میدان جریان به سطح کره محاسبه می‌شود. قانون ماده استوکس بر روی سطح کره عبارتست از:

$$S_{ij}(r,\theta) = \left(-P(r,\theta)\big|_{r=a} + \sigma_{rr}(r,\theta)\big|_{r=a}\right).e_r + \sigma_{r\theta}(r,\theta)\big|_{r=a}.e_\theta \quad (34)$$

محاسبه‌ی تنش‌های وارد برسطح کره

با قرار دادن رابطه‌ی (۱٤) در رابطه‌ی شرط مرزی لغزش، تنش برشی وارده به سطح به‌صورت ذیل محاسبه می‌گردد:

$$\sigma_{r\theta}(r,\theta)\Big|_{r=a} = \lambda V_\infty \mathrm{Sin}\theta \left[\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{P'_n(\mu)}{a^{n+2}} \\ -\frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} D_m G_{m,n}(\eta_0) \right) \end{array} \right\} P'_n(\mu) - 1 \right] \qquad (۳۵)$$

تنش شعاعی نیز به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$\sigma_{rr}(r,\theta)\Big|_{r=a} = \frac{2\mu}{a}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2} + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} V_\theta \right)_{r=a} \qquad (۳۶)$$

مقدار تنش کل وارده به سطح کره در این حالت عبارتست از:

$$S = \left[-\rho V^2_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{r^{n+1}} \left((n+1) P_{n+1}(\mu) \right) \right] + \frac{2\mu}{a}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \mu}\sqrt{1-\mu^2} + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} V_\theta \right)_{r=a} e_r + \lambda V_\infty \mathrm{Sin}\theta \left[\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{P'_n(\mu)}{a^{n+2}} - \\ \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} D_m G_{m,n}(\eta_0) \right) \end{array} \right\} P'_n(\mu) - 1 \right] e_\theta \qquad (۳۷)$$

محاسبه‌ی نیروی وارد بر سطح کره

پس از محاسبه‌ی میدان تنش، مقادیر نیروهـای وارده از طرف میدان جریان بر سطح ذره کروی محاسبه شده و با استفاده از آن‌ها روابط ضرایب پسا به‌دست می‌آید. به طور کلی دو نوع نیروی مقـاوم فشـاری و اصـطکاکی وجود دارند که از طرف میدان جریـان بـر سـطح کـره وارد مـی شـوند. نیـروی مقـاوم اصـطکاکی ناشـی از تنش‌های قائم و برشی F_{Dt}, F_{Dr} بـر روی سـطح کـره است. نوع دیگر نیروی مقـاوم کـه بـه پسـای فشـاری موسوم است، ناشی از توزیع میدان فشـار سـیال حـول کره بوجود می آید. نیروی قائم ناشی از فشـار و تـنش قائم وارده از طرف میدان جریان سیال بر جسم کـروی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$F_n = \oiint_A \left(-P(a,\theta) + \mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \mathrm{Cos}\theta \, dA \qquad (۳۸)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۲۳) در رابطه‌ی بالا نیـروی فشار نیز به صورت ذیل به‌دست می‌آید:

$$F_P = -\frac{2\pi a^4}{3}\left(\sum_{m=0}^{\infty} D_m \Re_{m,0}(\eta_0) \right) \rho V^2_\infty \qquad (۳۹)$$

با استفاده از مقادیر تنش‌های لزج قـائم و برشـی می توان مقادیر نیروهای مقاوم ناشی از این تنش‌هـا را بر روی سطح کره به‌دست آورد. اگـر نیـروی ناشـی از تنش قائم را با F_{Dr} ونیروی ناشی از تنش برشـی را بـا F_{Dt} نشان دهیم، نیروی ناشی از تنش‌های لـزج عبـارت است از:

$$F_{Dr} = -\oiint_A \sigma_{rr}(a,\theta) e_r . e_x \, dA = 4\pi\rho\nu a \int_{-1}^{1} \sqrt{1-\mu^2} \, V_\theta \, d\mu \qquad (۴۰)$$

$$F_{Dt} = -\oiint_A \sigma_{r\theta}(a,\theta) e_\theta . e_x \, dA = -\oiint_A \lambda V_\vartheta(a,\theta) \mathrm{Sin}\theta \, dA = 2\pi a\mu \mathrm{Tr} \int_{-1}^{1} V_\vartheta(a,\theta) \sqrt{1-\mu^2} \, d\mu \qquad (۴۱)$$

با ساده‌سازی انتگرال فوق و اسـتفاده از قضـیه‌ی تعامد توابع لژاندر نیروی ناشی از تـنش برشـی F_{Dt} از رابطه‌ی ذیل به‌دست می آید:

(۴۲)

نیروی لزج اعمال شده از طرف سیال بـه سـطح کره عبارتست از:

$$F_D = F_{Dr} + F_{Dt} \qquad (۴۳)$$

نیـروی مقـاوم کـل سـطح ذره کـروی در برابـر جریان سیال عبارت از مجموع نیروهای پسای ناشی از فشار مکانیکی F_{DP} و تنش برشی F_{Dt} وتـنش شـعاعی نرمال F_{Dr} می‌باشد و از رابطه‌ی ذیل محاسبه می‌شود:

$$F = \frac{16}{3}\pi\rho\nu a V_\infty \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} D_m G_{m,1}(\eta_0) \right) \\ + \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} D_m \Re_{m,0}(\eta_0) \right) \end{array} \right] \qquad (۴۴)$$

محاسبه‌ی ضرایب پسا

پس از محاسبه‌ی نیروهای وارده از طرف میدان جریان بر ذره کروی، مقادیر ضریب پسا محاسبه می شوند. نیروی مقاوم جریان سیال در برابر حرکت جسم به‌صورت $F_D = C_D A \frac{\rho V_\infty^2}{2}$ بیان می شود. که در آن، C_D؛ ضریب پسا، $A = \pi a^2$ ؛ سطح تصویر شده در امتداد جریان آزاد و V_∞؛ سرعت جریان آزاد و ρ؛ چگالی سیال می باشد. ضریب C_D بدون بعد است و در جریان سیال حول ذره کروی به صورت $C_D = F_D \Big/ \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 A$ تعریف می‌گردد. ضریب پسای ناشی از تنش قائم را می توان به صورت ذیل بیان کرد:

$$C_{Dr} = \frac{16}{3\,Re}\left\{6 + \sum_{m=0}^{\infty} D_m\left[\Re_{m,1}(\eta_0) + 2G_{m,1}(\eta_0)\right] - \eta_0 \Re_{m,0}(\eta_0)\right\} \qquad (٤٥)$$

ضریب پسای ناشی از تنش برشی ازرابطه‌ی ذیل به‌دست می‌آید:

$$C_{Dt} = \frac{8}{3\,Re}\left\{6Tr + \sum_{m=0}^{\infty} D_m\left[\Re_{m,1}(\eta_0) + G_{m,1}(\eta_0)\right]Tr\right\} \qquad (٤٦)$$

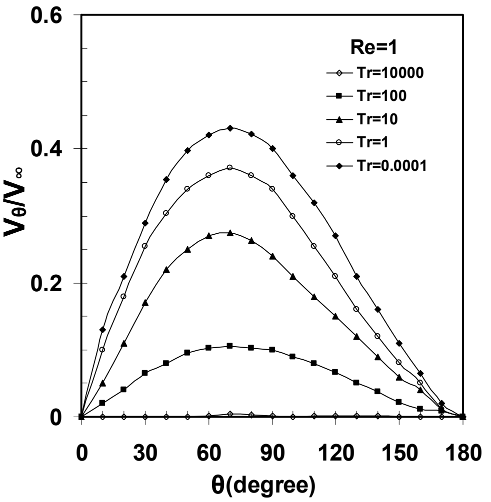
ضریب پسای کل جریان سیال حول کره را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$C_D = \frac{8}{3\,Re}\left\{\left[\sum_{m=0}^{\infty} D_m\left[\Re_{m,1}(\eta_0) + 2G_{m,1}(\eta_0)\right] - \eta_0 \Re_{m,0}(\eta_0)\right] + 3Tr + 6\right\} \qquad (٤٧)$$

ارائه‌ی نتایج و نمودارها

اکنون به بررسی نتایج نمودارهای حاصل از حل تحلیلی می‌پردازیم. در این بخش به بررسی نحوه‌ی تأثیرگذاری عدد رینولدز و تروستل بر مشخصات جریان سیال می پردازیم. شکل (٢) تغییرات سرعت محیطی جریان سیال بر روی سطح کره را در زوایای مختلف از سطح کره و در اعداد تروستل مختلف و در عدد رینولدز Re=1 نشان می دهد. مطابق شکل (٢) مشخص می‌گردد که سرعت جریان سیال در حرکت از نقطه‌ی سکون ابتدایی به سمت جلو افزایش می یابد و پس از رسیدن به مقدار بیشینه به تدریج کاهش یافته و به مقدار صفر در نقطه‌ی سکون انتهایی می‌رسد. با افزایش عدد رینولدز مقدار بیشینه سرعت محیطی به سمت جلوی کره جابه‌جا می شود و منحنی تغییرات سرعت محیطی نامتقارن هستند.

شکل (٣) تغییرات سرعت محیطی جریان سیال برروی سطح کره را دراعداد تروستل مختلف و در عدد رینولدز Re=5 نشان می‌دهد:

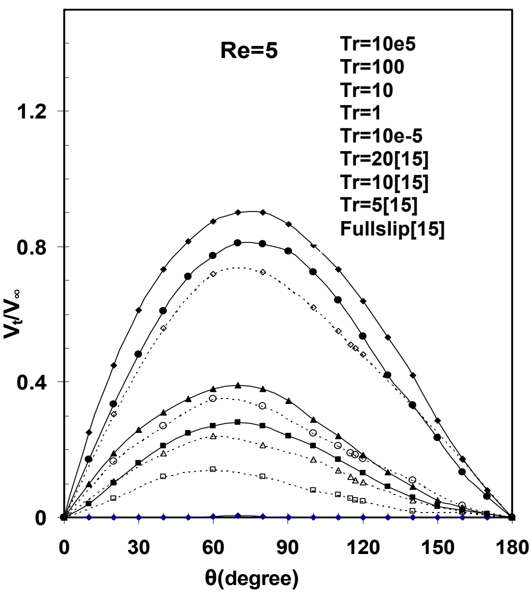


شکل ٢ تغییرات سرعت محیطی جریان سیال در زوایای مختلف از سطح کره در اعداد تروستل مختلف و در عدد رینولدز Re=1

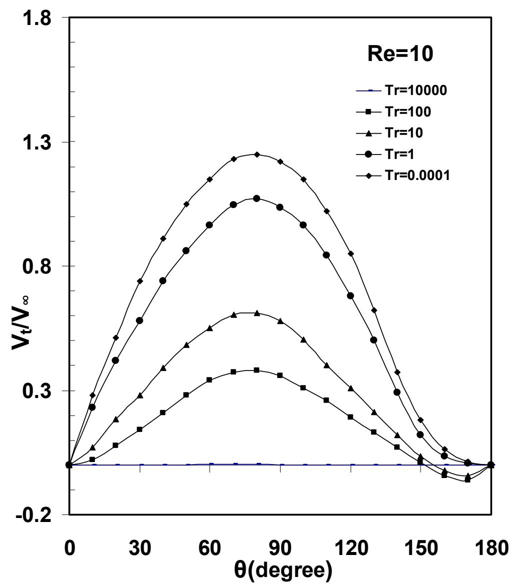
در این شکل، مقادیر محاسبه شده در این مقاله با نتایج به‌دست آمده در مرجع [15] مقایسه شده است. مقایسه نتایج مبین آن است که مقادیر سرعت محاسبه شده آشکارا از مقادیر محاسبه شده در مرجع [15] در Re=5 بیشتر است، اما هیچ گونه مقدار منفی در مولفه‌های برشی مشاهده نمی‌شود.

همان‌طور که در شکل (٤) مشخص است، در عدد رینولدز ١٠ و در اعداد تروستل ١٠٠ و حالت عدم لغزش، مقادیر سرعت مماسی برروی سطح منفی

می‌گردد که این امر، نشان دهنده‌ی برگشت سیال و ایجاد جدایش جریان روی سطح جداره است. در اعداد تروستل پایین، مشخص می‌شود که هیچ‌گونه مقدار منفی در میزان سرعت محیطی دیده نمی‌شود.



شکل ۳ تغییرات سرعت محیطی جریان سیال برروی سطح کره دراعداد تروستل مختلف و در اعداد رینولدز Re=5 و مقایسه‌ی مقادیر حاصل از حل تحلیلی مقاله با مرجع [15]



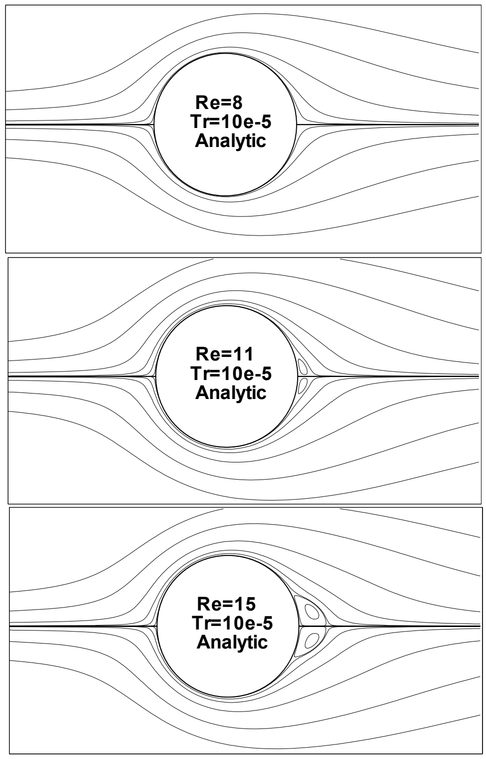
شکل ٤ تغییرات سرعت محیطی جریان سیال بر روی سطح کره دراعداد تروستل مختلف و در اعداد رینولدز Re=10

با استفاده از رابطه‌ی (۲۵)، خطوط جریان سیال حول کره ساکن ترسیم شد و نتایج آن در حالت عدم لغزش و لغزش کامل در برخی از اعداد رینولدز رسم شدند. شکل‌های (۵ - الف) و (۵ - ب) تغییرات خطوط جریان را در محدوده‌های اعداد رینولدز نزدیک به نقاط جدایش در حالت‌های عدم لغزش و لغزش نشان می‌دهد.

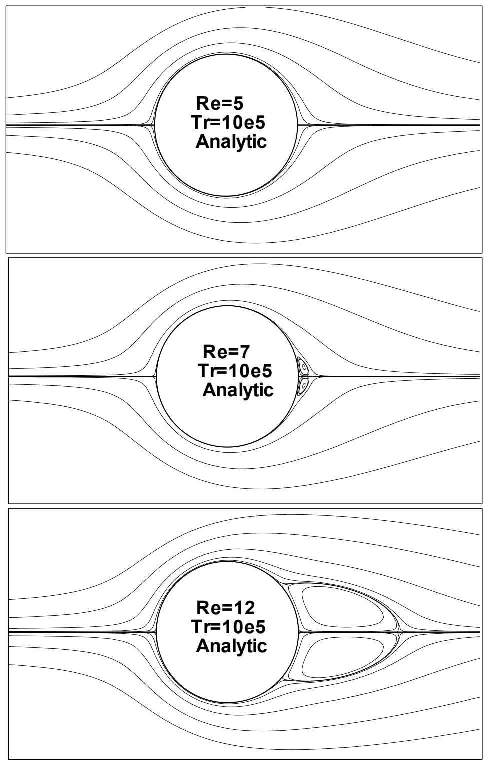
مطابق شکل‌های فوق، مشاهده می شود که در اعداد رینولدز بالا دو، گرداب متقارن با چرخشی در جهت مخالف بعد از کره ایجاد می‌شود. با ازدیاد عدد رینولدز، اندازه گردابه‌ها بزرگتر می شود. با افزایش ضریب لغزش خطوط، جریان در نزدیک کره فشرده تر شده و اختلاف خطوط جریان در قسمت عقب و جلوی کره کم‌تر می‌شود. در این حالت، گردابه‌ها در صورت وجود کوچکتر می شوند. شکل (۵ - ب) نشان می دهد که در حالت عدم لغزش یا Tr=10e5 اولین جدایش در جریان سیال برروی سطح در محدوده عدد رینولدز حدود Re=٦/٧ اتفاق می‌افتد و در حالت لغزش کامل Tr=10e-5 این اتفاق در عدد رینولدز ۱۰/۵ -۱۱ رخ می‌دهد. این اعداد در مرجع [۱۵] برای حالت عدم لغزش ٤ و برای لغزش حدوداً ۸ بیان شده است.

هر چند که نتایج عددی و آزمایشگاهی اولین جدایش را درحدود Re=20 گزارش نموده‌اند و نتایج به‌دست آمده از معادلات اوسین در این محدوده دقیق نیست، اما مشاهده می‌شود که نتایج خطوط جریان با استفاده از حل اوسین در حالت لغزش ایده آل تا ۱۱ ≈ Re و در حالت عدم لغزش Tr=10000 تا ۷ ≈Re معتبر است.

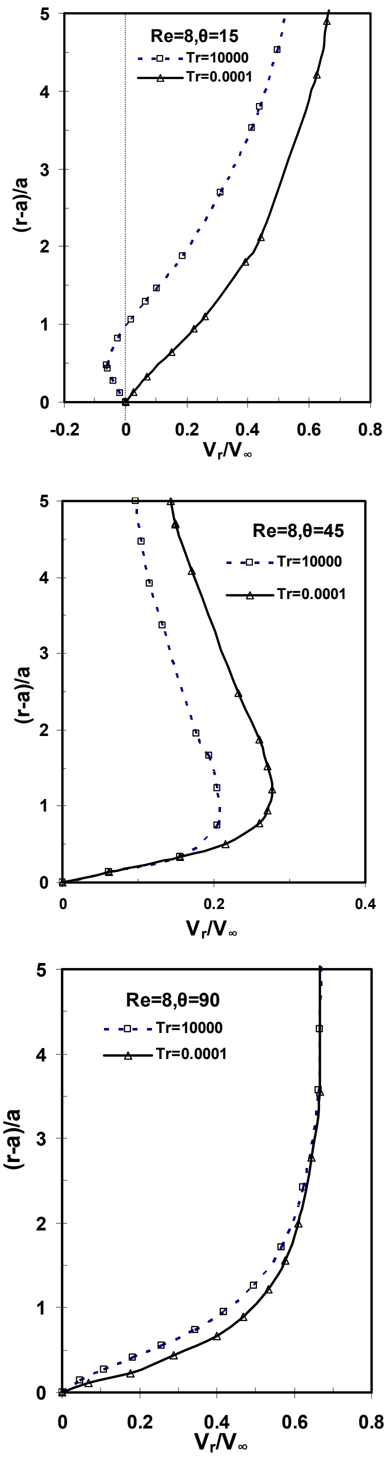
تأثیر عدد لغزش بر روی پروفیل‌های سرعت شعاعی در عدد رینولدز ۸ و در دوحالت لغزش وعدم لغزش و در زوایای ۱۵ و٤۵و٩٠ از نقطه‌ی پایین دست جریان در شکل (٦) نشان داده شده است.



شکل ۵ – الف تغییرات خطوط جریان در محدوده‌های اعداد رینولدز نزدیک به نقاط جدایش در حالت لغزش($Tr\rightarrow0$)



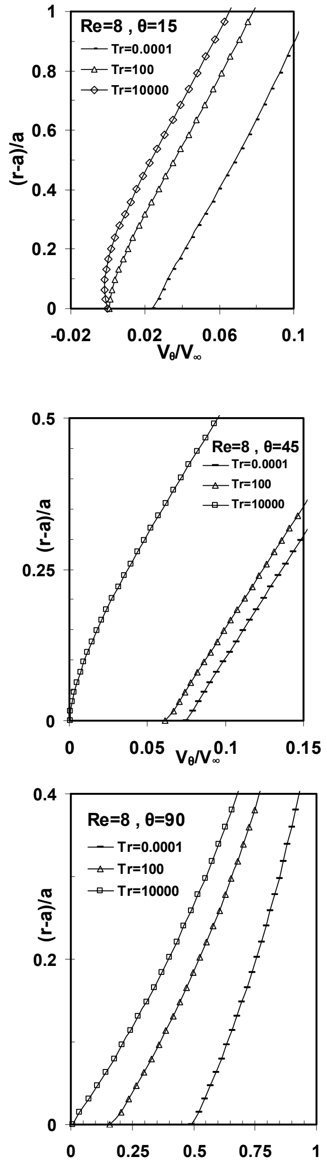
شکل ۵– ب تغییرات خطوط جریان در محدوده‌های اعداد رینولدز نزدیک به نقاط جدایش در حالت عدم لغزش($Tr\rightarrow\infty$)



شکل ٦ تغییر پروفیلهای سرعت شعاعی در عدد رینولدز ۸ و در دو حالت لغزش وعدم لغزش و در زوایای ۱۵ و۴۵و۹۰ واز نقطه‌ی پایین دست جریان

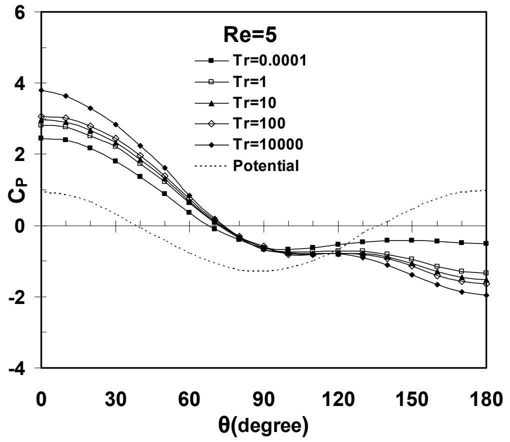
مطابق شکل، مشاهده می‌گردد در زوایای ۴۵ و۹۰ هیچ‌گونه نقطه عطفی در پروفیل سرعت در حالت

لغزش و عدم لغزش دیده نمی‌شود. درحالت عدم لغزش و زاویه‌ی ۱۵درجه نقطه عطف در پروفیل سرعت ایجاد شده است، ولی در حالت لغزش، هنوز نقطه عطف در پروفیل سرعت ایجاد نشده است. تأثیر عدد تروستل بر روی پروفیل‌های سرعت محیطی در عدد رینولدز ۸ و در اعداد تروستل Tr=10000, 10, 0.0001 و در زوایای ۱۵ و۴۵و۹۰ از نقطه‌ی پایین دست جریان در شکل (۷) نشان داده شده است:



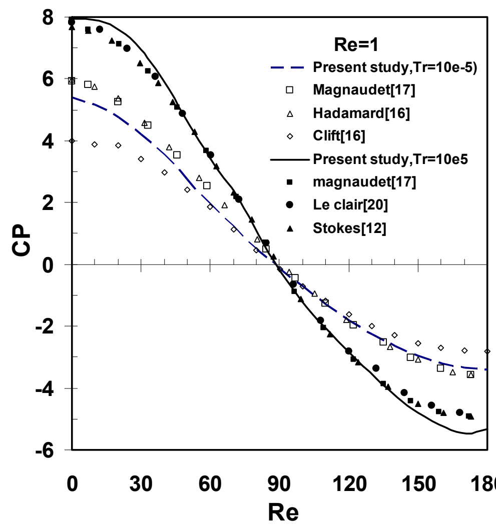
شکل ۷ تغییرات پروفیل سرعت مماسی جریان در زوایای مختلف از سطح کره، در عدد رینولدز ۸ و در حالت لغزش و عدم لغزش

مطابق شکل (۷) در پروفیل‌های سرعت، جریان سیال بر روی سطح کره، مقدار لغزش مشخص می‌گردد که با کاهش عدد تروستل، سرعت لغزش در پروفیل سرعت جریان سیال بیشتر می‌شود. در زاویه‌ی ۱۵ درجه سطح کره، مشاهده می‌شود که در پروفیل سرعت مماسی جریان نقطه عطف بوجود آمده و احتمالا" جریان در حال جدا شدن از سطح است. در شکل (۸) تغییرات فشار جریان سیال بر روی سطح کره در عدد رینولدز Re=5 و در زوایای مختلف و در اعداد تروستل مختلف نشان داده شده است:



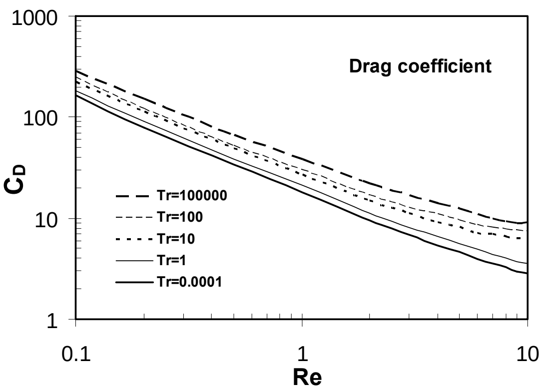
شکل ۸ تغییرات فشار جریان سیال بر روی سطح کره و در زوایای مختلف و در اعداد مختلف تروستل درعدد رینولدز Re=5

تغییرات فشار جریان سیال بر روی سطح کره و در زوایای مختلف، درعدد رینولدز Re=1 در دو حالت لغزش ایده آل و عدم لغزش در شکل (۸) نشان داده شده است. مقایسه‌ی نتایج به‌دست آمده در حالت عدم لغزش Tr=10e5، با نتایج به‌دست آمده از جریان حول یک کره صلب ناشی از حل تحلیلی استوکس [12] و نتایج عددی مگناودت [17]، لی کلیر[20] و نیز مقایسه‌ی نتایج حاصل از تحلیل جریان در حالت لغزش کامل Tr=10e-5 با نتایج حاصل از تحلیل جریان سیال حول حباب (τ=0) انجام شده در مرجع [17]، در این شکل نشان داده شده است.



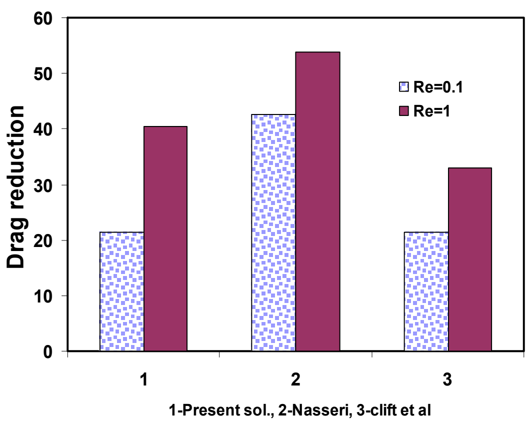
شکل ۹ تغییرات فشار جریان حول کره در زوایای مختلف و عدد رینولدز Re=1 در دوحالت لغزش ایده ال و عدم لغزش و مقایسه نتایج بهدست آمده با نتایج دیگران

نتایج به‌دست آمده، نشانگر انطباق خوب نتایج حل تحلیلی با نتایج سایر پژوهشگران است. با مرور نتایج شکل‌های (۱۰) تا (۱۱) مشخص می‌شود که ضرایب فشار محاسبه شده در اعداد بالاتر از Re=1 دارای دقت مناسبی نیستند و نوعی نوسان در تغییرات ضریب فشاردیده می‌شود که با افزایش عدد رینولدز، این نوسان افزایش می‌یابد. نکته‌ی مهمی که در شکل‌های فوق مشاهده می‌شود، آن است که با افزایش عدد تروستل، فشار نقطه سکون واقع در جلوی کره افزایش می‌یابد. در حالت کلی، محققین معتقدند که در محدوده‌ی اعداد رینولدز پایین ضرایب پسای محاسبه شده‌ی حل استوکس و حل عددی و حل اوسین و حل عددی معادلات ناویر استوکس و نتایج آزمایشگاهی یکسان است؛ لذا بررسی این موضوع از این نقطه نظر در آنالیز حرکت نانو ذره کروی دارای اهمیت زیادی است و نتایج جالبی را به همراه خواهد داشت. از طرفی میزان تأثیر تغییر ضریب لغزش سطح بر میزان تغییرات ضریب پسای جریان حول کره از اهمیت کاربردی برخوردار است. شکل (۱۰) تغییرات ضریب پسای جریان سیال را برحسب عدد رینولدز و در اعداد تروستل مختلف نشان می دهد.



شکل ۱۰ تغییرات ضریب پسای جریان سیال برحسب عدد رینولدز و در اعداد تروستل مختلف

همان‌طورکه در شکل (۱۰) مشاهده می‌شود، با افزایش عدد رینولدز ضریب پسای جریان حول ذره کروی کم می‌شود. جالب توجه این است که ضریب مقاومت کره در حالت عدم لغزش و لغزش ایده‌آل، کمی فرق می‌کند. بررسی اثر لغزش در مقدار نیروی پسای ایجاد شده در حرکت نانو ذره کروی با مطالعه‌ی جداگانه‌ی بخش‌های فشاری و اصطکاکی ضرایب پسا به‌صورت دقیق‌تری می‌توان مطالعه نمود. شکل (۱۱) مقایسه‌ی میزان کاهش پسا در روش حل موجود در مقاله را با نتایج مرجع [15] و حل عددی انجام شده توسط کلیفت [16] در دو عدد رینولدز ۱و ۰/۱ در حالت لغزش کامل(Tr⟶∞) و عدم لغزش(Tr⟶∞) نشان می دهد:



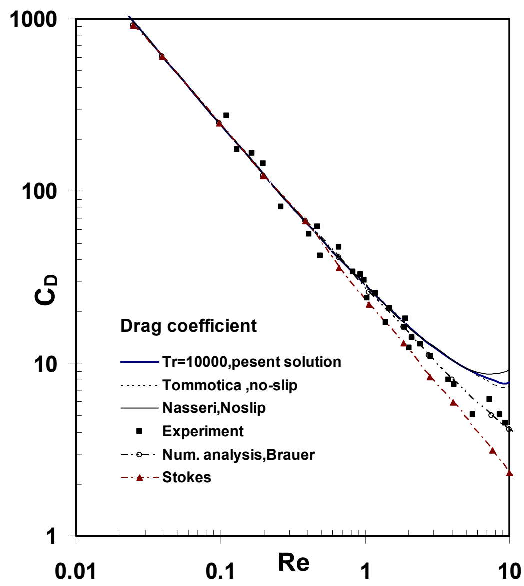
شکل ۱۱ مقایسه‌ی میزان کاهش پسا در روش حل مقاله حاضر با نتایج [15] و حل عددی انجام شده توسط کلیفت [16] در دو عدد رینولدز ۱و۰/۱ در حالت لغزش کامل(Tr⟶∞) و عدم لغزش(Tr⟶∞)

با توجه به شکل فوق، مشخص می‌گردد که درصد کاهش پسا بین حالت لغزش کامل و عدم لغزش در عدد رینولدز ۰/۱ برابر ۰/۲۳ است ودر عدد رینولدز۱ برابر با ۰/۴۲ می‌باشد؛ بنابراین در محدوده‌های عدد رینولدز پایین‌تر، تأثیر عدد تروستل بر میزان پسا کاهش می‌یابد. جدول (۱) میزان درصد خطای محاسباتی برای ضرایب پسا در روش حل مقاله‌ی حاضر را با نتایج مرجع [15] و حل عددی انجام شده توسط کلیفت [۱٦] در دو عدد رینولدز ۱و ۰/۱ در حالت لغزش کامل(Tr→0) و عدم لغزش (Tr→∞) مقایسه می‌کند.

مطابق نتایج جدول (۱) نتایج حل تحلیلی معادله‌ی اوسین به روش لمب، دارای خطای نسبی کم‌تری نسبت به نتایج محاسبه شده در مرجع [15] بوده و نتایج عددی مزبور انطباق مناسبتری با نتایج به‌دست آمده در مقاله دارد. در شکل (۱۲) تغییرات مقادیر ضرایب پسا برحسب عدد رینولدز ودر حالت عدم لغزش نشان داده شده است. در این شکل، تغییرات ضریب پسا حاصل از حل تحلیلی مقاله حاضر در حالت عدم لغزشTr=10000، با حل معادله‌ی اوسین حول کره صلب [13] و حل جریان حول کره [15]، وحل تحلیلی استوکس [12] و نتایج حل عددی صورت گرفته توسط برائر و سوکر [19] و نتایج آزمایشگاهی [19] در حالت عدم لغزش مقایسه شده است. با استفاده از این شکل، می‌توان دقت حل جریان حول کره با تقریب اوسین و به روش لمب را با سایر حل‌های تقریبی- تحلیلی انجام شده مقایسه نمود و صحت حل تحلیلی مقاله را ارزیابی کرد. از شکل (۱۲) مشخص است که تمامی مقادیر ضرایب پسای ناشی از حل‌های تحلیلی اوسین، استوکس، عددی و استوکس در محدوده‌ی 0.01<Re<0.3 تقریباً یکسان می‌باشند، بنابراین نمودارها در این محدوده برهم منطبق می‌شوند. با افزایش عدد رینولدز، این نمودارها از یکدیگر جدا می‌شوند. اولین نمودار مربوط به ضریب پسا حاصل از حل استوکس است که زودتر از سایر نمودارها از حل عددی در محدوده‌ی Re=0.3 جدا می‌شود. نمودار مربوط به حل اوسین [13] در محدوده‌ی Re=1 از نمودار عددی جدا می‌شود. ضریب پسای مربوط به حل [15] در حالت عدم لغزش در محدوده‌ی Re=5.5 و ضریب پسای مربوط به حل تحلیلی موجود در رساله‌ی (Tr=10000) در محدوده‌ی Re=7 از حل اوسین با شرط مرزی عدم لغزش [13] جدا می‌شود. اختلاف میان حل‌های عددی و تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی در اعداد Re>0.5 به وضوح قابل مشاهده است.

جدول ۱ مقایسه میزان درصد خطا محاسباتی برای ضرایب پسا در روش حل مقاله با نتایج مرجع [15] و حل عددی انجام شده توسط کلیفت[۱٦] در دو عدد رینولدز ۱ و ۰/۱ در حالت لغزش کامل(Tr→0) و عدم لغزش(Tr→∞)

	no-slip(Tr→∞)			full slip(Tr→0)		
Re	Present	Clift [16]	Nasseri[15]	Present	Clift [16]	Nasseri[15]
۱/۰	۲۲۵۸	۲٤٤/۰۷	٤۲۸	۱۱۷	۱۹۱/۸	۱٦۳
Error%	٪۷/۰۱	-	٪۱٦/۳٦	٪٦/۹	-	٪۱۵/۰۱
۱	۳۱/٤۵	۲۷/۳۱	۵۰/۷۳	۱۹/۳	۱۸/۳	۱۷/۱
Error%	٪۱۸/۷	-	٪۳۵/٦	٪۵/٤	-	٪٦/۵



شکل ۱۲ مقایسه‌ی ضرایب پسای حل تحلیلی مقاله با انواع حل‌های عددی و تحلیلی جریان پیرامون ذره کروی ساکن در حالت $Tr \to \infty$

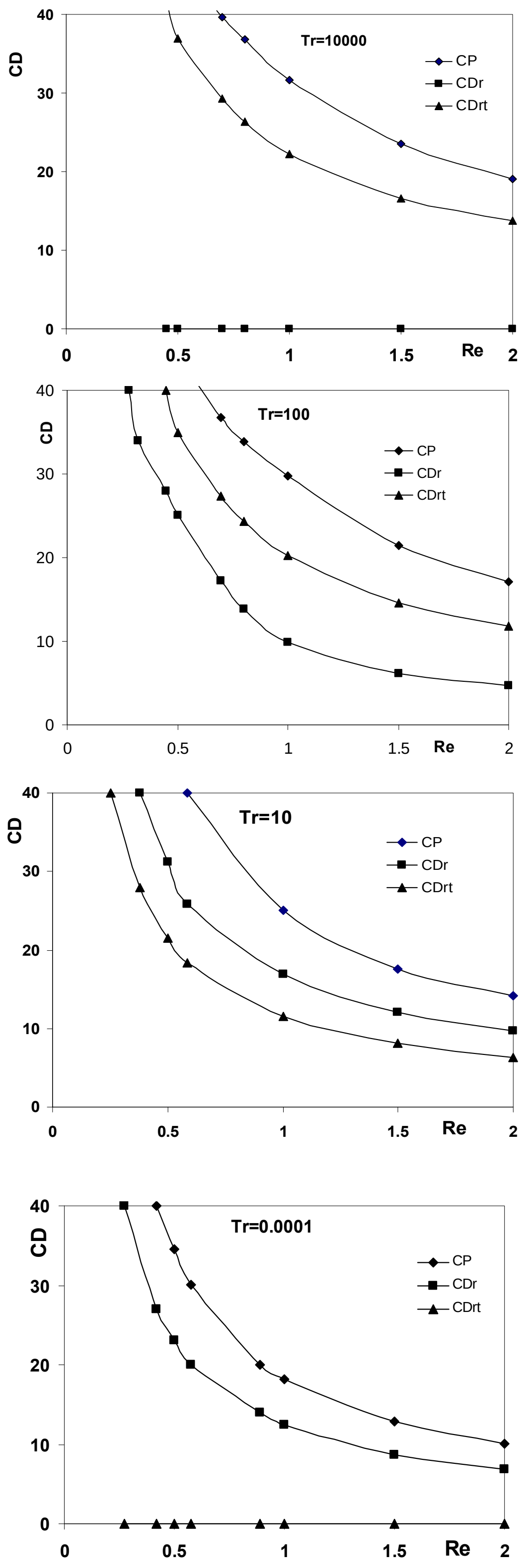
بررسی تغییرات ضریب پسا در اعداد تروستل مختلف

مرور مطالعات محققان مبین آن است که در مورد تأثیر پذیری تغییرات ضرایب پسا ناشی از تنش‌های برشی، قائم و فشاری از تغییرات ضریب لغزش در جریان سیال حول ذره کروی، هیچ‌گونه مطالعه‌ای صورت نپذیرفته است. در صورتی که عدد لغزش روی سطح تغییر کند، میدان سرعت و فشار تحت تأثیر قرار می گیرند و به تبع آن ضرایب پسای فشاری و ضرایب پسای لزج تحت تأثیر قرار می گیرند. شکل‌های (۱۳) تأثیر توام تغییرات عدد رینولدز و تروستل را بر تغییرات بخش‌های تشکیل دهنده‌ی ضریب پسای کل، مورد مطالعه قرار می‌دهد.

به طور کلی دو نوع نیروی پسای فشاری و اصطکاکی در جریان لزج حول اجسام وجود دارد. پسای اصطکاکی صرفاً ناشی از تنش‌های ایجاد شده بر روی سطح است. نوع دیگر پسا که همان پسای فشاری است، ناشی از تنش‌های قائم فشاری می باشد. بنابراین پسای کل ایجاد شده در کره، شامل بخش‌های پسای ناشی از فشار مکانیکی C_p، پسای ناشی از تنش برشی CD_t و پسای ناشی از تنش نرمال CD_r می‌باشند. با بررسی شکل‌های (۱٦) نتیجه می‌گیریم که در حالت عدم لغزش، ضریب پسای ناشی از تنش نرمال صفر می باشد و ضریب پسای ناشی از تنش برشی، حداکثر مقدار خود را داراست. با افزایش ضریب لغزش روی سطح و کاهش عدد تروستل، ضریب پسای ناشی از تنش برشی کاهش یافته و ضریب پسای تنش نرمال زیاد می‌شود؛ به طوری که در شرایط لغزش کامل، ضریب پسای تنش برشی به صفر نزدیک می‌شود و ضریب پسای ناشی از تنش نرمال به حداکثر خود می رسد. تغییرات ضریب پسای کل در اعداد تروستل مختلف و بر حسب عدد رینولدز قابل ملاحظه است و کاهش پسا به واسطه‌ی کاهش عدد تروستل، دراعداد رینولدز پایین‌تر کم‌تر است. نکته‌ی مهم آن است که مساله جریان سیال حول نانو ذره کروی در حالت لغزش ایده‌آل معادل با مساله جریان پتانسیل حول کره نیست؛ زیرا در حالت جریان پتانسیل، هیچ‌گونه اثری از لزجت در میدان جریان سیال دیده نمی‌شود، ولی حالت لغزش ایده‌آل Tr=10e-5 ضریب پسای ناشی ازتنش نرمال به حداکثر خود می‌رسد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، حل تحلیلی جریان سیال حول یک کره‌ی ساکن با استفاده از شرط مرزی لغزش وتقریب اوسین با استفاده از روابط لمب برای سرعت و فشار صورت گرفت. با انجام حل تحلیلی و محاسبه‌ی میدان جریان حول کره، به نحوه‌ی تأثیرگذاری پارامترهای مختلف در روابط دینامیکی و سینماتیکی میدان جریان سیال پی برده شد. نتایج به‌دست آمده با نتایج سایرپژوهشگران مقایسه شد و نتایج ذیل به‌دست آمد.



شکل ۱۳ تغییرات ضرایب پسای فشاری CP و ضرایب پسای ناشی از تنش شعاعی CDr وضریب پسای ناشی از تنش برشی Dt جریان سیال برحسب عدد رینولدز در اعداد تروستل مختلف

در حالـت عـدم لغـزش یـا Tr=10000 اولـین جدایش در جریان سیال بـرروی سـطح در محـدوده‌ی عدد رینولدز حدود ٦/٧ اتفـاق مـی افتـد و در حالـت لغزش کامـل Tr=0.0001 ایـن اتفـاق درعـدد رینولـدز ١٠/٥ -١١ رخ می دهد. درصد کاهش پسا بـین حالـت لغــزش کامــل و عــدم لغــزش در عــدد رینولــدز ٠/١ برابـر٠/٢٣ اسـت و در عـدد رینولـدز١ برابـر بـا ٠/٤٢ می‌باشد. در محدوده‌های عدد رینولـدز پـایین‌تـر تـأثیر عدد تروستل بر میزان پسا کاهش می‌یابد. اگر چه حـل اوسین در محدوده‌های اعداد رینولدز پایین معتبر است، اما نتایج حاصل از حل اوسین می‌تواند برای آگـاهی از نحوه‌ی تأثیرگـذاری ضـریب لغـزش روی مشخصـات میدان جریان مفید باشد. از بررسی خطوط جریان حول ذره کروی، نتیجه می‌شود کـه در حالـت شـرط مـرزی لغزش به علت این که افـت انـرژی جریـان در حالـت لغزش روی دیواره کم‌تر است، نقطه جدایش به سـمت پایین دست جریان تغییر مکان داده می‌شـود و دنبالـه‌ی کره در مقایسه با حالت عدم لغـزش، کـوچکتر اسـت.

مطابق شکل (٥- الف) دیده شد کـه در حالـت لغـزش ایده ال، یک ناحیه‌ی جدایش یافته و یک گردابه حـول کره ظاهر می‌شود.

با مقایسه‌ی نتایج حاصل از حـل عـددی جریـان حول کره‌ی مشخص شد که دقت نسبی محاسبات حل تحلیلی در مقاله‌ی حاضر مطلوب بوده و خطای نسـبی آن نسبت به حل مرجـع [15] بـه طـور قابـل تـوجهی کم‌تر است. تغییرات ضریب پسای کل نانو ذره کـروی در اعـداد رینولـدز و ضـرایب لغـزش مختلـف قابـل ملاحظه است و کاهش پسا به واسـطه‌ی کـاهش عـدد لغزش، دراعداد رینولدز پایین‌تر کم‌تـر اسـت. مسـأله‌ی جریان سیال حول نانو ذره کروی در حالت لغزش ایده آل معادل با مسأله‌ی جریان پتانسیل حول کـره نیسـت؛ زیرا در حالت جریان پتانسیل، هیچ‌گونه اثری از لزجت در میدان سیال دیده نمی‌شود؛ ولـی در حالـت لغـزش ایده‌ال Tr=10e-5 ضریب پسای ناشی ازتنش نرمال بـه حداکثر خود می‌رسد.

مراجع

1. Goldstien, S., "*Modern Developments in Fluid Dynamics*", Dover publication. Inc., New York, pp. 676-680, (1965).
2. Tyrrell, J. W. G., Attard, P. "Atomic force microscope images of nanobubbles on a hydrophobic surface and corresponding force-separation data", *Langmuir 18*, pp. 160-167, (2001).
3. Trethway, D., Liu, X., Meinhart, C., "Analysis of slip flow in micro channels", *Mech. Eng. Depart*., Univ. California, (2002).
4. Watanabe, K., Yanuar Mizunuma, H., "Slip of newtonian fluids at slid boundary", *JSME International Journal Series B, Contents of August*, Vol. 41, No. 3August, Series B, Fluids and Thermal Engineering, pp. 525, (1998).
5. Watanabe, K., Yanuar, Ohkido, K. and Mizunuma, H., "Drag reduction in flow through square and rectangular ducts with highly water-repellent walls". *Proc. ASME FED Summer Meeting on*

Turbulence Modification and Drag Reduction, FRD-237, Vol. 2, pp. 115-119, (1996).

6. Watanabe,K., Ogata, S., "Drag Reduction for a Rotating Disk with Highly Water-Repellent Wall", *JSME International Journal Series B, Contents of August*, Vol. 41, No. 3August, ,Series B, Fluids and Thermal Engineering , pp. 556, (1998).
7. Watanabe, K., Akino, T., "Drag reduction in laminar flow between two vertical coaxial cylinder", *J. fluid Eng.*, Vol. 121, pp. 541-547, (1999).
8. Trostel. R., "Gedanken zur Konstruktion mech. Theorien II". Berlin ,TUB Forschungsbericht , Nr.7, (1988).
9. Atefi G.H., "Einfluβ des slips auf das Wirbelfeld hinter dem schwach angestomten Zylinder" , T.U Berlin, (1991)
10. Atefi, G.H. "Quer Angeströmter Drehender Zylinder, Archivie of applied mechanics", pp. 61, (1991).
11. Oseen, C.W., "Über Die Stokessche Formel und uber eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik", Arkive for matematik, Bd. Nr 29, (1910).
12. Stokes, G. "On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums Trans"., *Cambr. Phil*. Soc., pp. 98, (1851).
13. Tommotica, S., Aoi, T., "The steady flow of viscous fluid past a sphere and circular cylinder at small Reynolds numbers"., *Quart. J. Mech. and Applied Math*.,Vol III, (1950)
14. Goldestein, Proc. R. Soc., Ser. A123, pp. 216-235, (1929)
15. Nasseri, S.M.,"Geschwindigkeitsslip bei stromungen langs fester wand", Berlin, TUB, (1991).
16. Clift, R., and Grace, J.R., and Weber, M. E., Bubbles, "*Drops and Particles*", New York: Academic Press, (1970).
17. Magnaudet, J., Rivero, M., Faber,J., "Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble", Part 1. steady straining flow, *J. Fluid Mech.284*, pp. 97-135, (1995).
18. Atefi, G. H., Niazmand, H. and Meigounpoory, M. R. , "Numerical analysis of 3-D flow past a stationary sphere with slip condition at low and moderate Reynolds numbers", *J. Dispersion Science and Tech*., 28:4, pp. 591-602, (2007).
19. Brauer H., Sucker,D., "Umstromung von platen, zylinder und kugeln", *Chemie ingenieure technik*., Nr.8, pp. 665-671, (1976).

20. Le Clair, B.P., Pruppacher, H.R., and Hamiliec, A.E., "Some relations between drag and flow pattern of viscous flow past a sphere and a cylinder at intermediate Reynolds numbers". *J. Fluid Mech*., pp. 764-781, (1970).